



# 2º CONGRESSO BRASILEIRO DE P&D EM PETRÓLEO & GÁS

## UM NOVO ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS APLICADO À PROPAGAÇÃO DE ONDA ESCALAR

Carlos Alexandre Santório<sup>1</sup>, Paulo César Oliveira<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Av. Fernando Ferrari, s/n – Campus de Goiabeiras – Vitória - ES - CEP. 29.060-970, e-mail: casantorio@terra.com.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Espírito Santo, Depto de Engenharia Rural – Centro de Ciências Agrárias - Alegre - ES CP16, CEP 29500-000, e-mail: pacol@npd.ufes.br

**Resumo** – O objetivo deste trabalho foi apresentar um novo esquema de discretização para o método de volume finito, denominado FLEX, aplicado ao problema de propagação de onda escalar. O novo esquema é comparado ao tradicional esquema de Diferença Central e ao esquema Flux-Spline por meio de dois problemas teste. Os resultados mostraram que para uma mesma malha, o novo esquema apresentou resultados mais próximos das soluções tomadas como referência, do que os outros dois esquemas.

Palavras-Chave: volume finito; propagação de onda escalar; simulação numérica

### A NEW DISCRETIZATION SCHEME TO THE FINITE VOLUME METHOD APPLIED TO SCALAR WAVE PROPAGATION

**Abstract** – The aim of this work was to present a new discretization scheme, to the finite volume method, applied to scalar wave propagation problem. The new scheme is compared to the traditional Central Difference scheme and Flux-Spline scheme by means of the two test problems. The results obtained showed that under the same grid, the new scheme provide a better approximation of the reference solutions, than the others two schemes.

Keywords: finite volume, scalar wave propagation, numerical simulation

## 1. Introdução

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar a aplicação de um novo esquema de discretização para o método de volumes finitos, denominado FLEX. Com o objetivo de reduzir esforço computacional, esse novo esquema admite que, o fluxo da variável dependente, transportada ao longo de cada volume de controle, varie de forma exponencial.

Em relação ao esquema FLUX-SPLINE, desenvolvido por Varejão (1979) e usado por Nieckele (1985) e Oliveira (1997) o novo esquema difere do mesmo, por somente uma constante no termo fonte adicional, característico do esquema FLUX-SPLINE. Os autores anteriormente citados, mostraram em seus trabalhos, que o esquema FLUX-SPLINE para uma determinada malha, possui um desempenho melhor que o esquema de diferença central, redundando em um menor esforço computacional, para se alcançar um determinado nível de erro com relação à uma solução de referência em problemas envolvendo difusão e convecção.

O novo esquema proposto será aqui comparado com os esquemas de DIFERENÇA CENTRAL e FLUX-SPLINE por meio de problemas teste envolvendo propagação de onda escalar em meio homogêneo.

Admite-se que o leitor esteja familiarizado com o método de volumes finitos, sendo, portanto omitidos alguns passos não essenciais ao longo da derivação do esquema.

## 2. Desenvolvimento Numérico do Esquema FLEX

### 2.1. Método de Volume Finito

As equações de conservação (massa, quantidade de movimento, energia, etc.) podem ser escritas, para uma variável escalar  $\mathbf{f}$  como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}\mathbf{f}) + \text{div}(\mathbf{r}\vec{\mathbf{v}}\mathbf{f}) = \text{div}(\Gamma \cdot \text{grad}\mathbf{f}) + S \quad (2.1)$$

ou ainda,  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}\mathbf{f}) + \text{div}(\vec{\mathbf{J}}) = S$

onde,  $\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{r}\vec{\mathbf{v}}\mathbf{f} - \Gamma \cdot \text{grad}\mathbf{f}$  representa o fluxo total (convectivo mais difusivo) da variável  $\mathbf{f}$

A formulação do método FLEX será construída a partir de situações unidimensionais em regime permanente e posteriormente estendida a situações bidimensionais transientes ou não.

#### 2.1.1. Discretização para Difusão Pura

##### 2.1.1.1 Difusão Unidimensional em Regime Permanente

A equação de governo neste caso é:

$$\frac{dJ}{dX} = S \quad (2.2)$$

onde,  $S$  é o chamado termo fonte e  $J$  é o fluxo difusivo dado por:

$$J = -\Gamma \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dX} \quad (2.3)$$

A forma discreta da equação de governo é obtida pela integração da equação (2.1) sobre um volume de controle adotando-se a hipótese de que os fluxos são constantes em cada face do volume de controle.

Observando a figura 2.1, a equação de discretização para o volume de controle ao redor do ponto  $i$  pode ser escrita como,

$$J_{i+1} - J_i = S \cdot \Delta X_i \quad (2.4)$$

Se admitirmos que o fluxo ao longo de um volume de controle pode ser representado por:

$$J = A \cdot X \cdot e^{\left(\frac{X}{\Delta X}\right)} + B \quad (2.5)$$

onde,  $X$  é a variável independente local variando de  $0 \leq X \leq \Delta X_i$ , teremos  $A_i = \frac{J_{i+1} - J_i}{\Delta X_i \cdot e^1}$  e  $B_i = J_i$ .

Uma expressão para  $\mathbf{f}$  pode ser obtida pela combinação das equações (2.3) e (2.5):

$$-\Gamma_i \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dX_i} = A_i \cdot X_i \cdot e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} + B_i \quad (2.6)$$

Sua solução para  $\Gamma_i$  constante no volume de controle  $i$  é:

$$\mathbf{f} = -\frac{A_i}{\Gamma_i} \cdot \left[ e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} \cdot (X_i \cdot \Delta X_i - \Delta X_i^2) \right] - \frac{B_i}{\Gamma_i} \cdot X_i + C_i \quad (2.7)$$

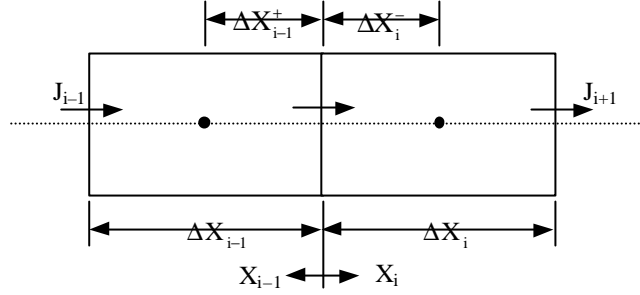


Figura 2.1 – Volumes de controle mostrando as posições dos fluxos J.

Adotando que o ponto da malha encontra-se no centro do volume de controle, para  $\mathbf{f}\left(X_i = \frac{\Delta X_i}{2}\right) = \mathbf{f}_i$  e a equação (2.7) torna-se:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_i - A_i \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \left[ e^{\left(\frac{X_i}{\Delta X_i}\right)} \cdot (X_i - \Delta X_i) + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \Delta X_i \right] - \frac{B_i}{\Gamma_i} \left( X_i - \frac{\Delta X_i}{2} \right) \quad (2.8)$$

Adotando o mesmo procedimento para o volume de controle  $(i-1)$ , obtém-se com um referencial  $X_{i-1}$  no sentido contrário de  $X_i$ , conforme pode ser visto na figura 2.1:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{i-1} - A_{i-1} \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \left[ e^{\left(\frac{X_{i-1}}{\Delta X_{i-1}}\right)} \cdot (X_{i-1} - \Delta X_{i-1}) + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \Delta X_{i-1} \right] - \frac{B_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \left( X_{i-1} - \frac{\Delta X_{i-1}}{2} \right) \quad (2.9)$$

onde,  $X_{i-1}$  é a variável independente local variando de  $0 \leq X_{i-1} \leq \Delta X_{i-1}$ , sendo,  $A_{i-1} = \frac{J_i - J_{i-1}}{\Delta X_{i-1} \cdot e^1}$  e  $B_i = -J_{i-1}$ .

As equações (2.8) e (2.9) representam a variação de  $\mathbf{f}$  dentro de um volume de controle. Essas equações na interface entre os volumes de controle  $i$  e  $i-1$  tornam-se:

$$\mathbf{f}(X_i = 0) = \mathbf{f}_i + \left( \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_i \cdot \Delta X_i}{\Gamma_i} - \left( \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_{i+1} \cdot \Delta X_i}{\Gamma_i} \quad (2.10)$$

e,

$$\mathbf{f}(X_{i-1} = 0) = \mathbf{f}_{i-1} - \left( \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_i \cdot \Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} + \left( \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{J_{i-1} \cdot \Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \quad (2.11)$$

Aplicando-se a condição de continuidade de  $\mathbf{f}$  ou seja,  $\mathbf{f}(X_{i-1} = 0) = \mathbf{f}(X_i = 0)$  obtém-se:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right) \cdot J_i = \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \cdot (J_i - J_{i+1}) + \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cdot (J_i - J_{i-1}) + (\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_i) \quad (2.12)$$

E assim a expressão para os fluxos  $J_i$  pode ser colocada na forma:

$$J_i = \text{Jhat}_i + DJ_i \cdot (\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_i) \quad (2.13)$$

onde,

$$\text{Jhat}_i = BJ_i \cdot (J_i - J_{i+1}) + CJ_i \cdot (J_i - J_{i-1}) \quad (2.14)$$

sendo,

$$DJ_i = \frac{2}{\left( \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} + \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \right)} \quad (2.15a)$$

$$BJ_i = \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_i}{\Gamma_i} \cdot DJ_i \quad (2.15b)$$

$$CJ_i = \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot e^1} \right) \cdot \frac{\Delta X_{i-1}}{\Gamma_{i-1}} \cdot DJ_i \quad (2.15c)$$

A equação de discretização para  $\mathbf{f}$  é obtida pela substituição dos fluxos na equação (2.4) pela expressão tal como a equação (2.13). Portanto,

$$[\text{Jhat}_{i+1} + DJ_{i+1} \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1})] - [\text{Jhat}_i + DJ_i \cdot (\mathbf{f}_{i-1} - \mathbf{f}_i)] = S \cdot \Delta X_i \quad (2.16)$$

O termo fonte  $S$  é linearizado como segue.

$$S = S_c + S_p \cdot \mathbf{f}_i \quad (2.17)$$

onde,  $S_c$  é a parte constante e  $S_p$  a parte função da variável  $\mathbf{f}_i$ .

A equações (2.16) e (2.17) são usadas na equação (2.4) para gerar a equação de discretização para  $\mathbf{f}$

$$AP_i \cdot \mathbf{f}_i = AIP_i \cdot \mathbf{f}_{i+1} + AIM_i \cdot \mathbf{f}_{i-1} + CON_i \quad (2.18)$$

onde,

$$AIP_i = DJ_{i+1} \quad (2.19a)$$

$$AIM_i = DJ_i \quad (2.19b)$$

$$AP_i = AIP_i + AIM_i - Sp_i \cdot \Delta X_i \quad (2.19c)$$

$$CON_i = (\text{Jhat}_i - \text{Jhat}_{i+1}) + S_c \cdot \Delta X_i \quad (2.19d)$$

A extensão do esquema a problemas bi e tridimensionais não oferece nenhuma dificuldade e pode ser vista em detalhes em Patankar (1980).

### 3. Aplicação do Esquema FLEX a problemas de propagação de ondas

#### Problema Teste 1

O problema aqui simulado é o da propagação de uma onda escalar unidimensional em uma barra de seção reta e propriedades constantes, mostrada na figura 3.1, engastada em uma extremidade e submetida na outra, a um carregamento constante, no caso a deformação  $q$ .

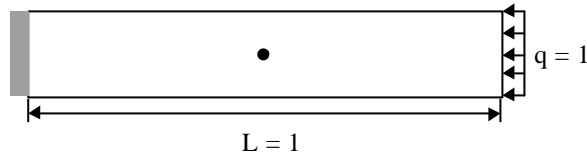


Figura 3.1 – Características da barra unidimensional.

Utilizou-se o esquema de Diferenças Finitas para a discretização do termo transiente da equação de governo, na sua forma mais simples e incondicionalmente estável. O esquema pode ser facilmente adaptado para uma discretização totalmente explícita. O esquema de discretização aqui empregado, é totalmente implícito, obtendo-se desta forma, um sistema de equações cujas matriz de coeficientes é diagonalmente dominante e tridiagonal. Utiliza-se para a solução deste sistema, eliminação gaussiana de forma iterativa, por causa da presença dos fluxos no termo fonte. O objetivo é avaliar o deslocamento no centro da barra (ponto A) ao longo do tempo adimensional.

A equação diferencial parcial adimensional, que governa a propagação da onda na barra, no caso de propriedades do meio assumidas como constantes, é:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left( -\Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X} \right) = 0$$

As condições iniciais e de contorno são:  $\mathbf{q}(X, t=0) = \frac{\partial \mathbf{q}(X, t=0)}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{q}(X=0, t > 0) = 0$  e  $\mathbf{q}(X=1, t > 0) = 1$

Os resultados para o deslocamento da seção central da barra ao longo do tempo adimensional, são plotados para os três esquemas nas figuras 3.2(a) e 3.2(b) para malhas com 9 ( $\Delta = 1/9$ ) e 27 ( $\Delta = 1/27$ ) volumes de controle, respectivamente e 400 passos no tempo ( $\Delta t = 1/400$ ) em comparação com uma solução de referência obtida por diferença central com 243 volumes de controle.

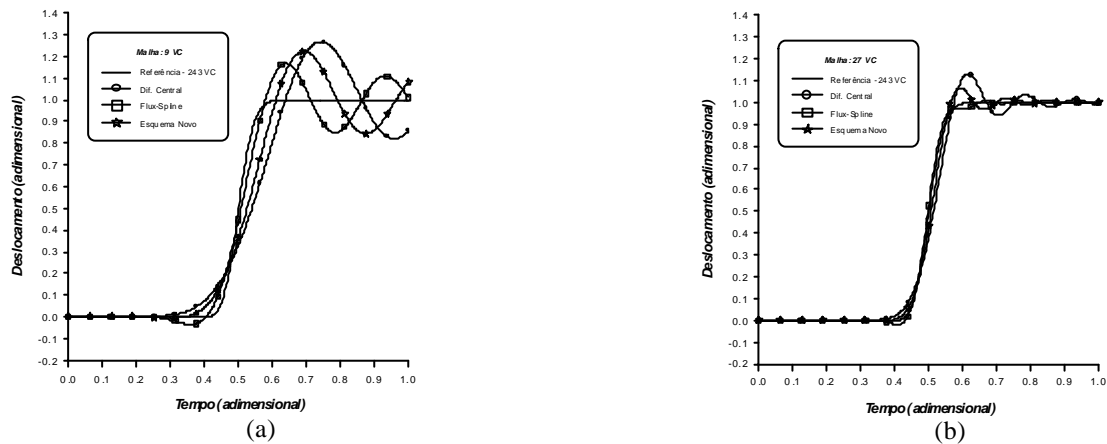


Figura 3.2 – Deslocamento da onda (ponto A), com  $\Delta t = 1/400$ , (a)  $\Delta = 1/9$  e (b)  $\Delta = 1/27$ .

Nota-se que, o novo esquema, ao se aumentar o número de volumes de controle, aproxima-se da solução de referência, mais rapidamente, que os outros dois esquemas aqui utilizados, não apresentando o “undershoot” gerado pelo esquema FLUX-SPLINE.

### Problema Teste 2

O problema a ser simulado é a propagação de uma onda sísmica numa placa plana. A equação diferencial de governo pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left( -\Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( -\Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial Y} \right) = S$$

Para gerar uma onda sísmica, faz-se necessário, a introdução de um termo fonte. Neste caso será usada a expressão abaixo, obtida de Bording & Lines (1997).

$$S = \left[ 1 - 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_c \cdot t_d)^2 \right] \cdot e^{-\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_c \cdot t_d)^2}$$

onde,  $t$  é o tempo;

$t_d$  é o tempo defasado, computando uma certa translação temporal para o cálculo do termo fonte, de acordo

$$\text{com: } t_d = t - \frac{2\sqrt{p}}{f_c};$$

$f_c$  é um parâmetro relacionado com a frequência de corte da fonte sísmica, onde:  $f_{\text{corte}} = 3 \cdot f_c \cdot \sqrt{p}$ .

As condições iniciais e de contorno são:  $f(X, Y, t=0) = \frac{\partial f(X, Y, t=0)}{\partial t} = 0$  e nos contornos da placa impõe-se  $f(X, Y, t) = 0$ .

Os resultados dos três esquemas, para o deslocamento da onda na linha central ( $Y = 0,5$ ) da placa, ao longo do tempo adimensional, são plotados na figura 3.3 (a) e 3.3 (b) para malhas com 27 ( $\Delta = 1/27$ ) e 81 ( $\Delta = 1/81$ ) volumes de controle respectivamente e 800 passos no tempo ( $\Delta t = 1/800$ ) em comparação com uma solução de referência obtida por diferença central com 243 x 243 volumes de controle.

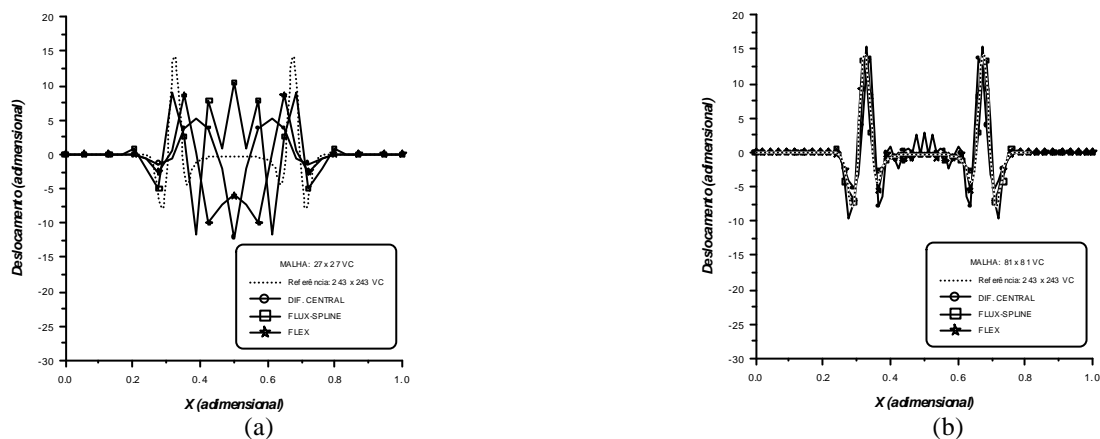


Figura 3.3 – Desloc. da onda ao longo da linha central ( $Y = 0,5$ ), para (a) 27 x 27 e (b) 81 x 81 volumes de controle.

Novamente o esquema FLEX mostra-se mais eficiente, pois sob a mesma malha, aproxima-se de forma mais rápida da solução de referência que os outros dois esquemas.

## 4. Conclusões

Neste trabalho, o esquema FLEX foi empregado em problemas uni e bidimensionais, regidos por equações diferenciais parciais hiperbólicas (propagação de onda escalar).

O esquema foi testado por meio de problemas teste, em comparação aos esquemas de DIFERENÇA CENTRAL e FLUX-SPLINE, para avaliar sua capacidade em resolver esta classe de problemas de engenharia.

Os resultados aqui obtidos pelo esquema FLEX, quando comparados aos esquemas citados, afirmam sua habilidade em lidar com as dificuldades contidas em problemas hiperbólicos, podendo-se concluir que, o esquema FLEX pode ser empregado em problemas hiperbólicos, empregando-se malhas menos refinadas, para obter-se um determinado nível de erro, mobilizando portanto, um menor esforço computacional.

## 5. Referências

- BORDING, R. P., LINES, L. R. **Seismic Modeling and Imaging with the Complete Wave Equation**. Society of Exploration Geophysicists. 1997.
- NIECKELE, A. O. **Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Problems**. 1985. Tese de Doutorado, University of Minnesota, USA.
- OLIVEIRA, P. C. **Esquema Flux-Spline Aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural**. 1997. Dissertação de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, SP.
- PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. McGraw-Hill, Hemisphere Publication, 1980.
- VAREJÃO, L. M. C. **Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer**. 1979. Tese de Doutorado, University of Minnesota/USA.