

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA EM UM CILINDRO HOMOGÊNEO E FINITO, EXCITADO POR UMA FONTE PONTUAL: ”UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS À PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS”.

Carlos Eduardo Guerra¹, Jadir da Conceição da Silva²

¹ Universidade Federal do Pará, UFPa-CCEN-Dep. de Matemática, Campus de Santarém, Caranazal, 68040-070, Santarém, Pará, Pa, ipanemaceg@bol.com.br. (Doutorando em pela UFRJ/IGEO)

² Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ-CCMN-IGEO – Depto. Geologia, Ilha do Fundão, 21910-090, Rio de Janeiro, RJ, jadir@geologia.ufrj.br

Resumo – A equação da onda em pressão é resolvida numericamente em uma geometria cilíndrica com simetria axial. A região estudada é fechada, i. é, o raio e a altura são finitos. O cilindro é preenchido por um fluido (água) que compõe um meio acústico perfeito. O meio é discretizado em elementos triangulares igualmente distribuídos e com as mesmas dimensões. Em cada elemento, a pressão é calculada nos três vértices. A distribuição de pressões na geometria considerada é então obtida através da composição das mesmas, calculadas em cada elemento. A variação temporal da distribuição de pressões é então obtida aproximadamente através de um esquema de diferenças finitas.

Palavras-Chave: método de elementos finitos; equação da onda; pressão

Abstract – The wave equation in pressure is numerically solved in a cylindrical geometry with axial symmetry. The studied area is closed; of course, the ray and the height are finite. The cylinder is filled out by a fluid (water), that composes a perfect acoustic way. The media is equally discretized in triangular elements equally distributed and with the same dimensions. In each element, the pressure is calculated in the three vertexes. The distribution of pressures in the considered geometry is obtained then through the composition of the same ones, made calculations in each element. The temporary variation of the distribution of pressures is obtained then approximately through an outline of finite differences.

Keywords: finite element method; wave equation; pressure

1. Introdução

A obtenção de modelos para a propagação de ondas acústicas e elásticas em meios geológicos é fundamental para a compreensão dos métodos sísmicos assim como do comportamento de alguns dispositivos utilizados na perfuração de poços, tal como da ferramenta sônica, assim como do perfil de tempo trânsito produzido pela mesma. Numa abordagem típica, o objetivo principal é obter uma função que satisfaça a equação acústica da onda e a um número finito de restrições. Esta função mostra a distribuição de uma variável (tensão, pressão ou deslocamento por exemplo) em todos os pontos da região considerada. Um problema fundamental que dificulta a obtenção de uma solução analítica viável para a equação da onda é a existência das heterogeneidades laterais (poço, reboco, zona invadida...) e a introdução de forças externas (fonte).

Para tratarmos de problemas com geometrias complexas temos que usar uma metodologia que trabalhe com soluções aproximadas da equação da onda. Na abordagem por elementos finitos a função pressão não é obtida em todos os pontos do espaço e sim num número finitos de pontos que são denominados por nós. A função pressão é substituída então por um conjunto de funções interpoladoras. Uma integração é então efetuada na equação da onda tendo-se como base a região discretizada (Método de GALERKIN, (C.S.Desay, 1979)). O resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem que pode ser resolvido por um método convencional qualquer (J. N.Reddy, 1993). Neste trabalho utilizaremos o método de diferenças finitas centrais devido a sua facilidade de implementação e a sua fácil convergência.

Soluções numéricas acústicas podem ser obtidas por aproximações vindas da teoria da elasticidade tal como a obtida por Michel Bouchon (1992), onde foram utilizadas **funções de Green (Butkov, 1988)** como base para aplicação dos métodos de **elementos de contorno (Gajski, 1997)**. Embora esta metodologia tenha uma boa aplicabilidade em geometrias não homogêneas do tipo "FLUIDO-ROCHA", ela possui o inconveniente de se trabalhar com **potenciais de Helmholtz (Karl F. Graff, 1975)**, o que dificulta sensivelmente a aplicação das condições de contorno e interface e o cálculo dos valores de pressão. Uma outra abordagem proposta por John T. Etgan (1989) utiliza o método pseudoespectral para discretizar as derivadas espaciais, ou seja, os operadores lineares são expandidos em séries ortogonais e daí por diante aplica-se o método de diferenças finitas centrais.

Basicamente, o objetivo deste trabalho é obter uma solução por elementos finitos da equação da onda em pressão num meio homogêneo e fluido excitado por uma fonte pontual. Esta solução numérica será comparada com uma solução analítica clássica para o problema da pressão em um meio 3D (G.B. Whitham, 1974). Esta metodologia será o ponto de partida para a implementação de uma abordagem mais completa que vise o estudo de propagação de ondas em meios heterogêneo isotrópico e não isotrópico.

2. Metodologia

Neste trabalho, queremos resolver a equação da onda numa região cilíndrica de altura $2h$ e raio r_0 . A região é totalmente preenchida por um fluido de densidade \mathbf{R} e parâmetro de Lamé \mathbf{I} (Figura 1). No ponto de coordenadas $(r=0, z=0)$ uma fonte pontual transiente no tempo excita o meio fluido. Podemos representar o cilindro como uma região plana \mathbf{W} no espaço $\langle xyz \rangle$ que sofre uma rotação em torno do eixo z .

$$\Omega = (x = 0) \cap (y \geq 0) \cap (y \leq r_0) \cap (z \geq -h) \cap (z \leq h). \quad (1.1)$$

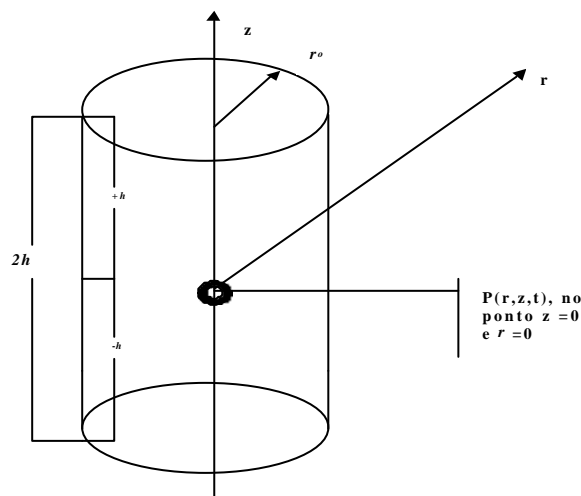


Figura 1 : Modelo geométrico de uma região cilíndrica preenchida por um fluido. A região simula uma seção de poço de comprimento $2h$ e raio r_0 . Nesta geometria, será obtida uma solução numérica da equação da onda na forma de pressão.

Em coordenadas cilíndrica, a região obtida pela rotação de Ω é definido por Ω^T , ou seja :

$$\Omega^T = (r \leq r_0) \cap (r \geq 0) \cap (z \leq h) \cap (z \geq -h) \cap (q \geq 0) \cap (q \leq 2p). \quad (1.2)$$

Tirando proveito da simetria cilíndrica do problema, podemos reescrever a equação completa da onda na forma de pressão escalar em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) + f(r, z, t). \quad (1.3)$$

Na equação (1.3), $f(r, z, t)$ representa uma força externa, especificamente, a fonte.

Começamos o procedimento por dividir a região Ω^T em n sub-regiões triangulares Ω^e . Por uma questão de simplicidade e de simetria do problema, assumiremos que as regiões Ω^e possuem a mesma área e as mesmas dimensões. Em cada vértice do triângulo definimos uma pressão P_i^e , onde “ i ” é o número do vértice e “ e ” é o elemento em questão. Como o sistema de coordenadas é o cilíndrico e a região é axi-simétrica, o campo de pressões independe do ângulo q , e discretização da região Ω^T assume um caráter “2D”, ou seja, é como se estivéssemos trabalhado sobre a região plana. Finalmente, após a aplicação do teorema de Green, e aproximação de Galerkin-Bubnov, chega-se a equação da onda na forma discretizada :

$$\sum_{e=1}^{ne} [K_t^e]_{3 \times 3} [\ddot{P}_i^e]_{3 \times 1} = \sum_{e=1}^{ne} [K_d^e]_{3 \times 3} [P_i^e]_{3 \times 1} + \frac{F(t)}{2p} \sum_{e=1}^{ne} [N_j^e(0,0)]_{3 \times 1}. \quad (1.4)$$

2.1. A solução para pressão no domínio do tempo

A equação (1.4) é na verdade um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo linear de 2ª ordem, que resolve o problema da pressão escalar em Ω^T , somando soluções obtidas em cada sub-região elemento Ω^e . Entretanto, o somatório pode ser colocado na forma de um sistema global que contabiliza a contribuição total de cada elemento. Desta forma reescreveremos (1.4) na forma de um sistema único global, ou seja:

$$[K_{Gt}]_{n \times n} [\ddot{P}_i]_{n \times 1} = [K_{Gd}]_{n \times n} [P_i]_{n \times 1} + \frac{F(t)}{2p} [K_i]_{n \times 1}. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é então reescrita usando-se um esquema de diferenças finitas centrais que nos dá finalmente a forma discretizada final da equação da onda, ou seja,

$$\{[P]_{n \times 1}\}_{j+1} = (\Delta t^2 [K_{Gt}]_{n \times n}^{-1} [K_{Gd}]_{n \times n} + 2) \{[P]_{n \times 1}\}_j + \frac{F_j}{2p} \Delta t^2 [K_{Gt}]_{n \times n}^{-1} [K_i]_{n \times 1} - \{[P]_{n \times 1}\}_{j-1}. \quad (1.6)$$

Para resolvermos a equação (1.6) temos que ter duas aproximações para a pressão. O problema de propagação de ondas abordado neste trabalho impõe que as funções deslocamento, tensão e pressão sejam causais, ou seja, se o sinal da fonte é detectado a uma distância $d > 0$ é razoável supor que:

$$t < \frac{d}{c} \Rightarrow P(r, z, t) = 0. \quad (1.7)$$

A equação diferencial (1.5) na forma analítica juntamente com a condição inicial (1.7) é denominado por “Problema de Cauchy”. Na forma discreta a condição inicial (1.7) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \{[P]_{n \times 1}\}_{-1} &= \{[0]_{n \times 1}\}, \\ \{[P]_{n \times 1}\}_0 &= \{[0]_{n \times 1}\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2.2. Análise dos resultados

Neste trabalho, a equação da onda na forma de pressão, resolvida numericamente, assume a forma não homogênea onde o termo $f(r, z, t)$ representa uma fonte pontual monopolar dada por:

$$f(r, z, t) = P_0 \ell^{-at} \text{sen}(\mathbf{b} \mathbf{r}) \frac{\mathbf{d}(\mathbf{r}) \mathbf{d}(z)}{2p \mathbf{r}}, \quad (1.9)$$

A solução numérica em pressão é então comparada com uma solução analítica clássica do mesmo problema. Esta solução é obtida em um meio fluido, homogêneo, infinito e isotrópico, que em coordenadas cartesianas é dada por:

$$P(\vec{r}, t) = -\frac{P_0 e^{-a\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)} \text{sen}\left(\mathbf{b}\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)\right)}{4\pi|\vec{r}|}, \quad (1.10)$$

onde $|\vec{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Na figura 2 observamos dois sismogramas sintéticos obtidos com detectores a 15 e 20 cm da fonte. Neste exemplo, um meio com distância radial de um metro por um de profundidade é discretizado com 21 nós em cada eixo r e z , com um Δt de $0.4 \cdot 10^{-6}$ metros.

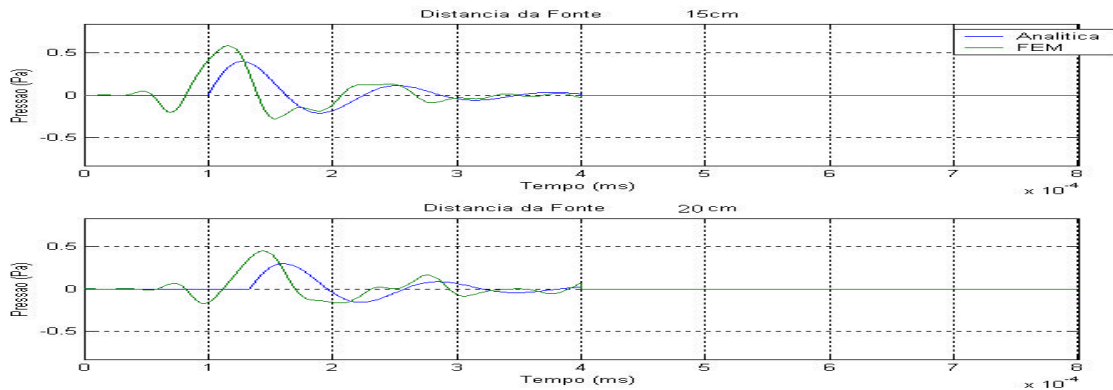


Figura 2: Sismogramas sintéticos obtidos em fontes afastadas a 15 e 20 cm da fonte. Em detalhes nota-se os efeitos da baixa discretização espacial (21 pontos em cada eixo). Destacam-se o desvio de fase e amplitude.

Nota-se claramente o efeito da baixa densidade de pontos espaciais, cuja consequência imediata é a deformação na forma da função, um efeito semelhante ao “ALIAS” produzido pela baixa amostragem em sinais digitais. Uma outra consequência observada é o desvio de fase e amplitude, este sim um efeito típico da baixa discretização espacial do meio. Na figura 3 observa-se uma nítida melhora no ajuste de amplitude e fase quando aumentamos a densidade espacial de pontos para 81 nós em cada eixo, mantendo-se o mesmo Δt . Porém, a melhora na fase e na amplitude, também veio acompanhada por um problema típico de discretização em malhas de elementos finitos e diferenças finitas,

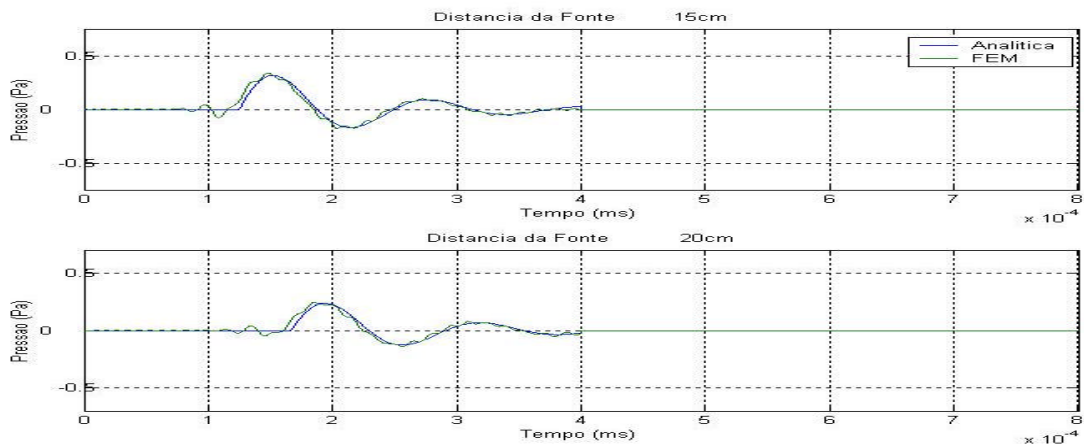


Figura 3: Sismogramas sintéticos obtidos em fontes afastadas a 15 e 20 cm da fonte com uma discretização de 81 pontos em cada eixo. Nota-se a correção na amplitude e na fase, mas observa-se também um efeito de dispersão numérica, vista como uma ondulação que acompanha toda a curva.

a dispersão numérica. Com a diminuição dos valores de Δr e Δz , as sucessivas iterações a cada Δt envolvem operações aritméticas com números de pontos flutuantes cada vez menores que podem se aproximar da precisão do computador, gerando erros de arredondamentos. Estas flutuações aparecem em toda curva gerada (com exceção do trecho de “zero-padding”) dando a impressão da existência de um outro sinal sobreposto. Estes, também chamados por ruídos numéricos, podem ser melhores evidenciados através do espectro de energia do sinal. No exemplo em questão, o ruído aparece como um conjunto de “frequências anormais” ou parasitas, como são normalmente referidas. No espectro

de energia obtido no detector a 15 cm da fonte, estas frequências situam-se na faixa entre 0 e 80 KHz em valores absolutos (figura 4). Estas frequências não só tendem a aparecerem com a diminuição de Δr e Δz ou Δt , mas também tendem a aumentar com o afastamento do detector da fonte como pode ser observado no espectro de energia da figura 5. Finalmente na figura 6, temos os sismogramas obtidos a 15 e 20 cm da fonte com uma discretização espacial de 151 nós em cada eixo. Com o aumento da densidade de pontos temos como consequência um deslocamento das frequências parasitas a esquerda ou seja, agora presentes na faixa de 0 a 160 KHz. Como a contribuição do espectro para o sinal nesta faixa de frequência é muito pouca, temos uma impressão de melhora no sinal como se pode observar na figura 7. O processamento subsequente com densidades superiores a 151 nós em cada eixo esbarra no limite de estabilidade ($c = \frac{C\Delta t}{\Delta r} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\Delta r = \Delta z$). Uma outra forma de se tentar corrigir os erros propagados pelas flutuações

parasitas é através da aplicação de fórmulas de correção (Gene H. Golub, 1992). Talvez, o mais importante mesmo seja trabalhar dentro do limite de ponto flutuante do computador, ou seja aumentar a precisão numérica sempre que for necessário.

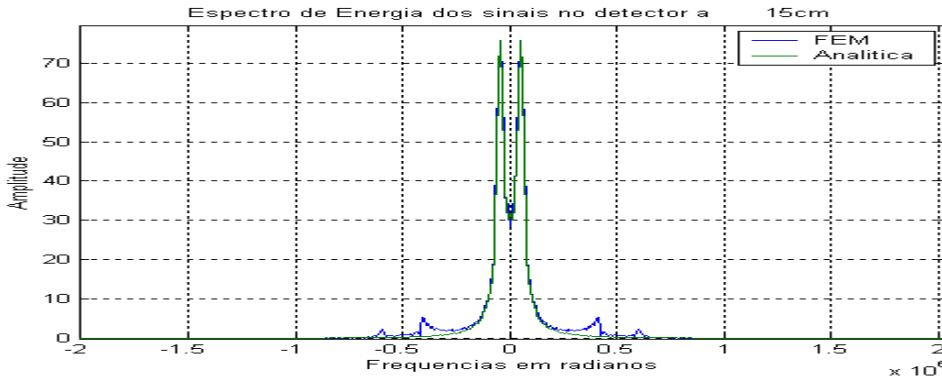


Figura 4 : Espectro de energia do sinal do detector a 15 cm da fonte. Pode-se observar a frequência parazita entre a faixa de 0 a 80 KHz em valores absolutos.

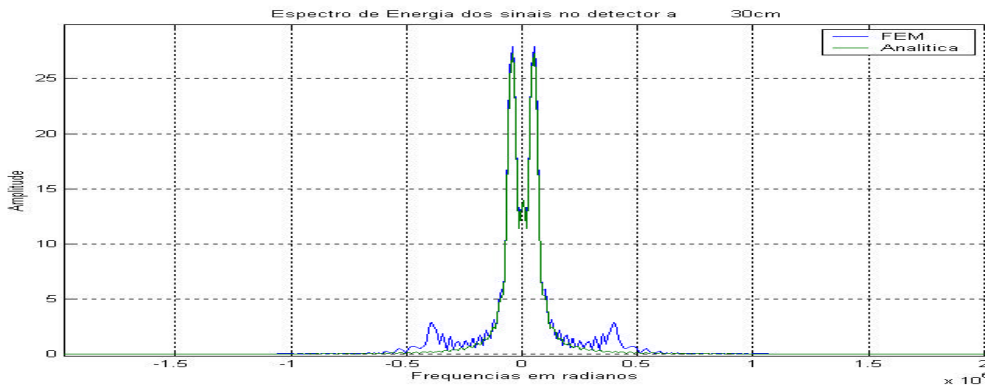


Figura 5 : Espectro de energia do sinal do detector a 30 cm da fonte. Pode-se observar um aumento das frequências parasitas na faixa de 0 a 80 KHz em valores absolutos

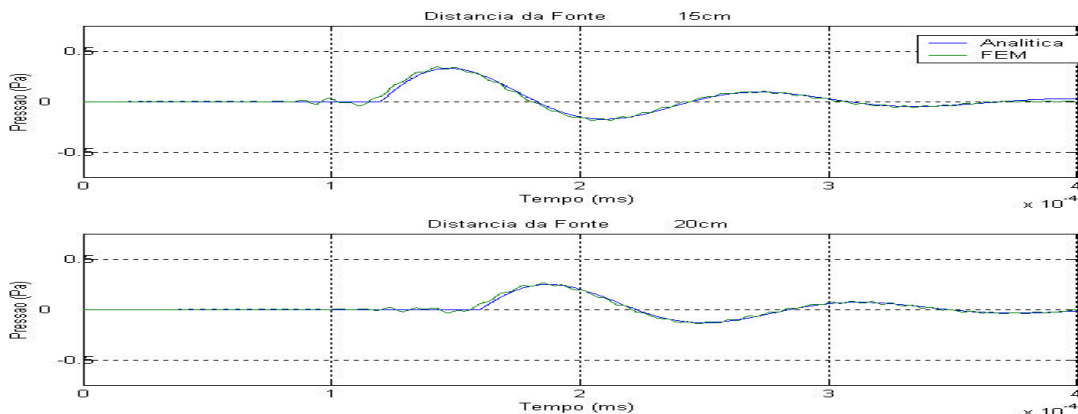


Figura 6 : Sismogramas sintéticos obtidos em fontes afastadas a 15 e 20 cm da fonte com uma discretização de 151 pontos em cada eixo. Observa-se uma pequena melhora na definição do sinal embora existam ainda frequências parasitas.

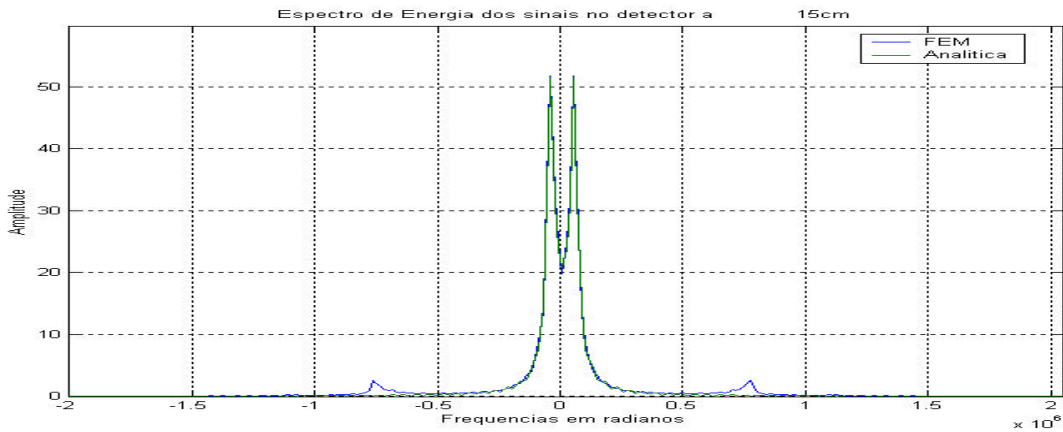


Figura 7 : Espectro de energia do sinal do detector a 15 cm da fonte. Pode-se observar um deslocamento das frequências parasitas para faixa de 80 a 160 KHz em valores absolutos.

3. Conclusões

Este trabalho mostrou que é possível fazer uma modelagem numérica de propagação de ondas utilizando-se recursos computacionais convencionais, desde que sejam obedecidos os critérios matemáticos de convergência e estabilidade. As malhas regulares, confeccionadas com elementos triangulares, se mostraram perfeitamente aplicáveis para a discretização de espaços homogêneos. Obteve-se, com o método de Galerkin, uma razoável eficiência na discretização espacial de uma região cilíndrica de dimensões longitudinais e radiais próxima de um metro por um metro, com uma densidade de oitenta pontos em cada eixo, o que perfaz uma densidade de pontos nodais da ordem de 12641, na malha. Também não houve a necessidade de empregar filtros ou janelas de frequências para melhorar a qualidade do sinal modelado no tempo, uma vez que as frequências parasitas ficaram restritas a uma amplitude aceitável e dentro de uma faixa compatível. Dada a frequência alta do evento e o meio fluido com velocidade alta, a discretização temporal no esquema de diferenças finitas constitui o principal gargalo no processamento das soluções numéricas, sem que, no entanto, torna-se a metodologia inviável. Levado-se em consideração que as modelagens de sistemas não homogêneos, particularmente os poços-formações, são realizadas tendo como base as medidas de parâmetros físicos lidas por uma ferramenta imersa em um meio fluido, a equação da onda em pressão oferece uma alternativa viável para a simulação de medidas acústicas, além de simplificar a aplicação das condições de contorno e possivelmente as de interfaces.

4. Referências

- DESAY, C.S., Elementary Finite Element Method, Prentice-Hall Inc. (1979).
- REDDDY, J. N., An Introduction to the Finite Element Method, McGraw Hill, Inc, Second edition (1993).
- BOUCHON, M., A numerical simulation of the acoustic and elastic wavefields radiated by a source on a fluid-filled borehole embedded in a layered medium *Geophysics*, Vol. 58 N° 4, P. 475-481, (1992).
- BUTKOV, Física Matemática, LTC Editora, (1993).
- GJSKI, D. D., Principles of Digital Design, Prentice Hall (1997).
- GRAFF, K. F., Wave motion in elastic solids, Clarendon . Oxford (1975).
- ETGAN, J.T., accurate wave equation modeling, *SEP-60*, P. 131-148, Stanford University, (1989).
- WHITHAM, G. B., Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons Inc. (1974).
- MARFURT, K. J., Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations, *Geophysics*, Vol. 49, N° 5, P. 533-549, (1984).
- WEAVER, H. J., Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis, John Wiley & Sons, Inc. (1989).
- GOLUB, G. H., Scientific Computing and Differential Equations, An introduction to Numerical Methods, Academic Press, (1992).
- DIAS, J., et al, Introdução à Física, McGraw Hill de Portugal (2000).