

## ANÁLISE DE PÓS-FLAMBAGEM DE VIGAS ELÁSTICAS ESBELTAS SUJEITAS A CARREGAMENTOS TÉRMICOS UNIFORMES

Rafael Familiar Solano<sup>1</sup>, Murilo Augusto Vaz<sup>2</sup>

<sup>1</sup> COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Oceânica, solano@peno.coppe.ufrj.br

<sup>2</sup> COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Oceânica, murilo@peno.coppe.ufrj.br

**Resumo** – Este trabalho apresenta formulação e solução analítica para o comportamento de pós-flambagem de vigas esbeltas sujeitas a variações de temperaturas uniformes e restritas por condições de contorno imóveis e bi-rotuladas. O material é assumido elástico linear e a relação térmica deformação-temperatura é não-linear. As equações de governo são derivadas da compatibilidade geométrica, equilíbrio de forças e momentos, equações constitutivas e relação deformação-deslocamento, rendendo um grupo de seis equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem com condições de contorno especificadas em ambas as extremidades, constituindo um complexo problema de valor de contorno. A solução analítica fechada encontrada via integral elíptica completa é derivada das equações de governo definindo a forma da viga pós-flambada (elástica). Os resultados são apresentados em gráficos adimensionais para um intervalo do gradiente de temperatura e diferentes valores da razão de esbeltez. A consideração de vigas esbeltas permite estender a formulação para dutos submarinos, retratando, então, o fenômeno da flambagem térmica nestes, através de uma série de análises em modelos analíticos e numéricos incluindo a não-linearidade geométrica.

Palavras-Chave: Pós-Flambagem; Flambagem Térmica; Vigas Elásticas

**Abstract** – This paper presents formulation and analytical solution for the post-buckling behaviour of slender rods subjected to uniform temperature variations and constrained by double-hinged non-movable boundary conditions. The material is assumed linear elastic and its thermal strain-temperature relationship is non-linear. The governing equations are derived from geometrical compatibility, equilibrium of forces and moments, constitutive equations and strain-displacement relation, yielding a set of six first-order non-linear ordinary differential equations with boundary conditions specified at both ends, which constitutes a complex boundary value problem. A closed-form analytical solution found via complete elliptic integral is derived from the governing equations defining the shape of the post-buckled rod (elastica). The results are presented in non-dimensional graphs for a range of temperature gradients and different values of slenderness ratios. The consideration of slender rods allows extending the formulation for pipelines. The phenomenon of thermal buckling in pipelines, through analytic and numeric models, including geometric non-linearity is then studied.

Keywords: Post-Buckling, Thermal Buckling, Elastic Rods

## 1. Introdução

O problema da estabilidade elástica de vigas sujeitas a cargas térmicas é substancialmente diferente do de vigas sujeitas a cargas compressivas mecânicas, fato este que motivou os vários estudos referentes a flambagem térmica de vigas. El Naschie (1976) considerou a estabilidade térmica de uma viga extensional. O comportamento de flambagem e pós-flambagem de acordo com a visão de Koiter são tratados no trabalho pela teoria geral de vigas de sistemas discretos. Em seu trabalho, Jekot (1996) investigou a pós-flambagem térmica de vigas constituídas fisicamente de material termo-elástico não-linear. O intervalo para a temperatura de segurança foi determinado, e algumas comparações entre o comportamento de pós-flambagem linear e não-linear foram discutidos. Contudo, a não-linearidade geométrica devido à curvatura do eixo central não foi considerada e uma forma simplificada da deformação axial não-linear foi usada. Coffin e Bloom (1999) desenvolveram uma solução via integral elíptica para a pós-flambagem de uma viga linear elástica e higrótérmica completamente restringida quanto à expansão axial. Eles assumiram uma relação deformação-temperatura linear e resolveram o grupo de equações diferenciais na configuração não deformada, conseqüentemente, duas equações integrais elípticas precisaram ser resolvidas simultaneamente. Li e Cheng (2000) baseados na teoria geométrica não-linear exata para vigas inextensíveis e usando um método de *shooting* (chute), propuseram uma análise computacional para o comportamento de pós-flambagem térmica de vigas com ambas as extremidades restritas com relação ao movimento axial, rotulada-rotulada, assim como, engastada-engastada. Mais recentemente, Li et al. (2002) apresentaram um modelo matemático para a pós-flambagem de uma viga elástica com extremidades rotulada-engastada quando um aumento quase estático de temperatura é aplicado. Usando o método de *shooting* em conjunto com a concepção de continuação analítica, o problema de valor de contorno não-linear constituído de equações diferenciais foi resolvido numericamente. Cisternas e Holmes (2002) incluíram os efeitos da expansão térmica na teoria de viga inextensível, focando seus estudos nas bifurcações resultantes das equações de equilíbrio sob condições de contorno específicas.

Este trabalho investiga a resposta de pós-flambagem de uma viga esbelta inicialmente reta feita de material elástico linear cuja relação deformação-temperatura é não-linear. O gradiente de temperatura é assumido uniforme ao longo da viga e a expansão é resistida por extremidades imóveis bi-rotuladas. A solução é obtida por integrais elípticas desacopladas, que são derivadas das equações de governo na configuração deformada, definindo completamente a forma da viga (elástica). Esse estudo pode ser qualitativamente expandido para dutos e outras estruturas esbeltas sujeitas a carregamentos térmicos.

## 2. Formulação Matemática

As equações de governo são derivadas da compatibilidade geométrica, equilíbrio de forças e momentos, equações constitutivas e relação deformação-deslocamento, que são apresentadas a seguir. Considere uma viga elástica esbelta com extremidades imóveis e bi-rotuladas em sua configuração inicial e defletida, conforme mostra a figura 1.

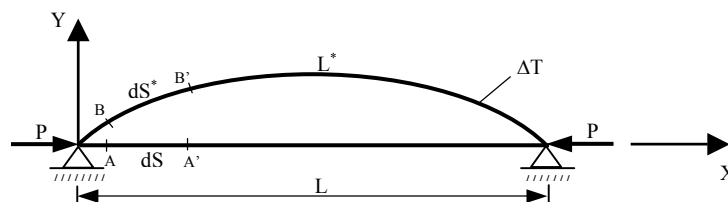


Figura 1 - Esquema de uma viga elástica defletida sob carregamento térmico.

Onde o par  $(X, Y)$  constitui o sistema de coordenadas,  $\Delta T$  é o gradiente de temperatura uniforme,  $P$  é força de compressão oriunda das restrições a expansão,  $L$  é o comprimento inicial e  $L^*$  é o comprimento deformado da viga.

### 2.1. Compatibilidade Geométrica

Aplicando relações trigonométricas num elemento infinitesimal deformado da viga  $dS^*$  tem-se:

$$\frac{dX}{dS^*} = \cos \theta \quad (1a)$$

$$\frac{dY}{dS^*} = \sin \theta \quad (1b)$$

Onde  $S^*$  é o comprimento de arco deformado ( $0 \leq S^* \leq L^*$ ) e  $\theta$  é o ângulo entre a tangente e o eixo  $X$ .

## 2.2. Equilíbrio de Forças e Momentos

Do equilíbrio de momentos na extremidade B' do elemento ( $\sum M_{B'} = 0$ ), por exemplo, encontra-se:

$$\frac{dM}{dS^*} = P \operatorname{sen} \theta \quad (2)$$

Onde  $M$  é o momento fletor.

O equilíbrio de forças na direção X ( $\sum F_X = 0$ ) resulta numa carga de compressão constante  $P$  ao longo da viga. Sendo assim:

$$\frac{dP}{dS^*} = 0 \quad (3)$$

## 2.3. Relações Constitutivas

Assumindo materiais lineares elásticos, homogêneos e isotrópicos (relação constitutiva dada pela Lei de Hooke), e considerando o estado de flexão pura ( $M = -EIK$ ), onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga, a curvatura  $K$  é dada por:

$$\frac{d\theta}{dS^*} = K \quad (4)$$

E substituindo a eq. (4) em (2) obtêm-se:

$$\frac{dK}{dS^*} = -\frac{P}{EI} \operatorname{sen} \theta \quad (5)$$

## 2.4. Relação Deformação-Deslocamento

Para um elemento infinitesimal a deformação linear específica  $\varepsilon$  (ou alongamento relativo) é definida como sendo a relação entre o alongamento sofrido pelo elemento, ao passar para a configuração deformada:

$$\frac{dS}{dS^*} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (6)$$

Quando uma viga esbelta é sujeita a um gradiente de temperatura  $\Delta T$  esta tende a expandir-se, e conseqüentemente, uma carga de compressão  $P$  surge ao longo da viga devido as restrições aos movimentos impostas nas extremidades. Desse modo, a deformação total da viga é dada pela soma da deformação térmica e da deformação devido a carga de compressão ( $\varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_c$ ):

$$\varepsilon = \alpha \Delta T + \frac{\bar{L}}{E} \alpha^2 \Delta T^2 - \frac{P}{EA} \cos \theta \quad (7)$$

Onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $A$  é a área da seção transversal,

$$\bar{L} = \bar{l}(1 - 2\nu) - 2\bar{m}(\nu^2 - 1) + \bar{n}\nu^2$$

$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$  são constantes de Murnaghan e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Os primeiros dois termos do lado direito da eq. (7) definem a deformação térmica para materiais cuja relação deformação-temperatura é não-linear, como proposto por Smith et al. (1966). E para obter uma relação deformação-temperatura linear basta considerar nulo o segundo termo do lado direito da eq. (7), isto é,  $\bar{L} = 0$ .

Em resumo, as equações de governo de uma viga elástica esbelta com extremidades imóveis sujeitas a um carregamento térmico uniforme induzido são dadas pelas eqs. (1a), (1b), (3), (4), (5) and (6). E as seguintes condições de contorno devem ser aplicadas:  $X(0) = Y(0) = K(0) = X(L^*) - L = Y(L^*) = K(L^*) = 0$ . Além disso, as variáveis podem ser adimensionalizadas de acordo com as seguintes relações:  $L^* = l^*L$ ,  $X = xL$ ,  $Y = yL$ ,  $S = sL$ ,  $S^* = s^*L$ ,  $K = \kappa/L$ ,  $\lambda^2 = L^2 A/I$ ,  $\gamma = \bar{L}/E$ ,  $P = pEI/L^2$  e  $\Delta T = \Delta t/\lambda^2 \alpha$ . Onde a constante  $\lambda$  é a razão de esbeltez da viga e  $\gamma$  é o coeficiente de deformação térmica não-linear.

## 2.5. Determinação da Temperatura Crítica de Flambagem

O cálculo da carga crítica de flambagem segue a aproximação direta da equação de equilíbrio de momentos assumindo pequenos deslocamentos, isto é,  $\theta$  muito pequeno, o que implica em  $\cos\theta \cong 1$  e  $\sin\theta \cong \theta$ . A temperatura crítica de flambagem é obtida pela solução não trivial da equação de governo, e é dada por:

$$\Delta t_c = \frac{\lambda^2}{2\gamma} \left( -1 + \sqrt{1 + 4\pi^2 \gamma / \lambda^2} \right) \quad (8)$$

A eq. (8) indica que dois parâmetros controlam a temperatura crítica de flambagem, a razão de esbeltez da viga  $\lambda$  e o coeficiente de deformação térmica não-linear  $\gamma$ .

## 3. Solução Analítica de Pós-Flambagem

A solução analítica fechada é desenvolvida a seguir para uma relação deformação-temperatura não-linear via integral elíptica completa das equações de governo na configuração deformada. É mais conveniente trabalhar com a inclinação do ângulo  $\theta$  (Bažant e Cedolin(1991)). Assim, tem-se:

$$\frac{d^2\theta}{ds^{*2}} = -p \sin\theta \quad (9)$$

Esta equação não-linear pode ser facilmente resolvida empregando integrais elípticas. Integrando a eq. (9) e aplicando as condições de contorno nas extremidades tem-se:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{ds^*} \right)^2 = p \cos\theta + C \quad (10)$$

Onde  $C = -p \cos\beta$  e  $\theta(0) = -\theta(l^*) = \beta$ . Então:

$$\frac{d\theta}{ds^*} = \sqrt{2p(\cos\theta - \cos\beta)} \quad (11)$$

Recorrendo a relações trigonométricas familiares para reescrever a eq. (11), separando e mudando de variáveis ( $\sin\theta/2 = c \sin\phi$  onde  $c = \sin\beta/2$ ) e após manipulações algébricas, encontra-se o comprimento defletido da viga:

$$L^* = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\phi}} \quad (12)$$

As coordenadas  $x$  e  $y$  da configuração defletida de uma viga esbelta podem ser obtida pelas eqs. adimensionais (1a) e (1b):

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{\phi_0}^{\pi/2} \frac{1 - 2c^2 \sin^2\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\phi}} d\phi \quad (13a)$$

$$y = \frac{2c}{\sqrt{p}} \cos\phi_0 \quad (13b)$$

E  $-\pi/2 \leq \phi_0 \leq \pi/2$ . Como  $\kappa = -py$ , a curvatura da viga  $\kappa$  na configuração deformada pode agora ser prontamente obtida:

$$\kappa = -2\sqrt{p} c \cos\phi_0 \quad (14)$$

A simetria indica que o ponto de deslocamento máximo ocorre para  $x(l^*/2) = 1/2$ , então pode-se calcular  $p$  com a simples utilização da eq. (13a):

$$p = \left[ 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2c^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}} d\phi \right]^2 \quad (15)$$

Logo para cada configuração deformada (que é relativa a um gradiente de temperatura), isto é, para uma dada inclinação  $\beta$  nas extremidades,  $c = \sin \beta$  é calculado, e por conseguinte  $p$  pela eq. (15). Finalmente, é possível encontrar as coordenadas  $(x, y)$  e a curvatura  $\kappa$  ao longo da viga pelas eqs. (13a), (13b) e (14) respectivamente. O gradiente de temperatura associado à configuração deformada pode ser obtido considerando a eq. (7). Assim:

$$\Delta t = \frac{\lambda^2}{2\gamma} \left( -1 + \sqrt{1 + 4D\gamma/\lambda^2} \right) \quad (16)$$

Onde:  $D = \lambda^2 (L^* - 1) + 2\sqrt{p} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2c^2 \sin^2 \phi)^2}{(1 - c^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$  que pode ser calculado uma vez que  $p$  e  $L^*$  são conhecidos.

#### 4. Análise de Resultados

Um estudo paramétrico é executado com a finalidade de analisar os resultados. A solução é implementada através de um programa computacional desenvolvido no aplicativo matemático Mathcad 2000 (1999). A relação térmica deformação-temperatura é considerada não-linear e os resultados mais significativos relativo ao fenômeno de pós-flambagem térmica de vigas para valores típicos da razão de esbeltez: configuração deformada, máxima deflexão, ângulo de inclinação máximo, curvatura máxima, carga de compressão e deformação total. Os resultados são apresentados para  $\gamma = 0$  e  $\gamma = -5$  (materiais metálicos, veja Smith et al. (1966)), que respectivamente correspondem a materiais com relações temperatura-deformação linear e não-linear. Os coeficiente  $\gamma = -5$  é relativamente grande para aços, mas é assumido para enfatizar o efeito não-linear.

As propriedades físicas e geométricas devem ser cuidadosamente selecionadas para assegurar o significado prático e real das análises, assim como evitar a não conformidade com as hipóteses da formulação matemática. Altas temperaturas e deformações acima de 2% não devem ser consideradas. E além disso, como parâmetro geométrico fundamental para esse tipo de estrutura, realiza-se o estudo paramétrico para diferentes valores da razão de esbeltez da viga  $\lambda = 50, 100, 150$  e  $200$ .

A viga está inicialmente reta, desprovida de imperfeições iniciais ou temperatura inicial que induza deformação. A temperatura é aumentada uniformemente e a deformação total da viga é monitorada com o objetivo de estabelecer a temperatura máxima permitida para cada razão de esbeltez. As temperaturas nas quais a viga deforma 1% e 2%, considerando as relações deformação-temperatura linear ( $\gamma = 0$ ) e não-linear ( $\gamma = -5$ ), são apresentadas na tabela 1.

Tabela 1 - Temperaturas de flambagem para análises linear e não-linear.

$\lambda$	$\Delta t$ ( $\gamma = 0$ / $\gamma = -5$ )	
	$\varepsilon = 1\%$	$\varepsilon = 2\%$
50	34,6 / 37,4	59,4 / 68,9
100	109,6 / 116,4	209,4 / 237,6
150	234,6 / 248,3	459,4 / 519,3
200	409,6 / 433,1	809,4 / 913,8

Uma vez que a carga crítica de flambagem é atingida e a temperatura é progressivamente aumentada, a força de compressão surgida devido às restrições impostas cai consideravelmente. Isto é claramente observável na figura 2, onde a variação da carga de compressão versus o gradiente de temperatura para vigas sujeitas a relação deformação-temperatura linear ( $\gamma = 0$ ) e não-linear ( $\gamma = -5$ ) é apresentada.

A figura 3 exhibe a deformação total, isto é, o alongamento relativo da viga. A deformação começa quando a temperatura crítica de flambagem é atingida, e como esperado esta aumenta com a temperatura, sendo este aumento mais acentuado para vigas esbeltas.

As figuras 4 e 5 apresentam os resultados para a deflexão máxima e o ângulo de inclinação máximo na viga respectivamente – que ocorre no meio e nas extremidades da viga respectivamente – em função da temperatura.

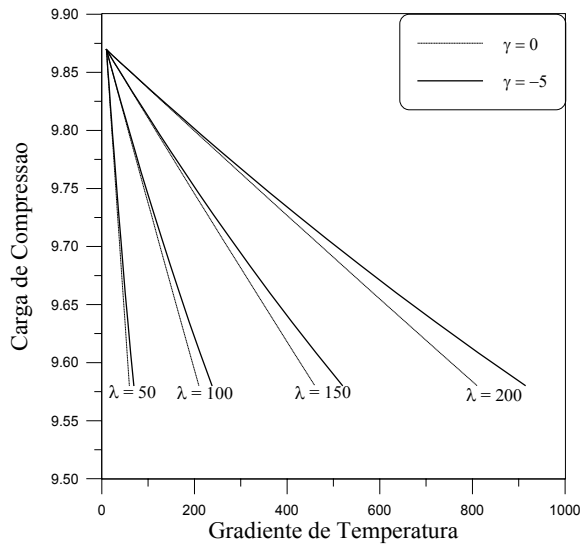


Figura 2 - Carga de compressão em função da temperatura.

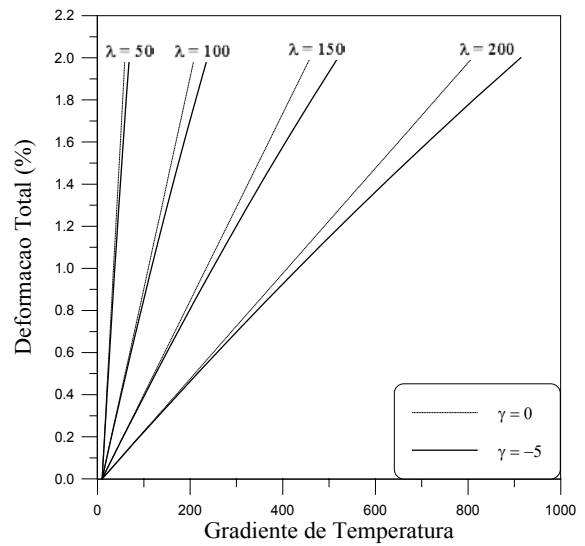


Figura 3 - Deformação total em função da temperatura.

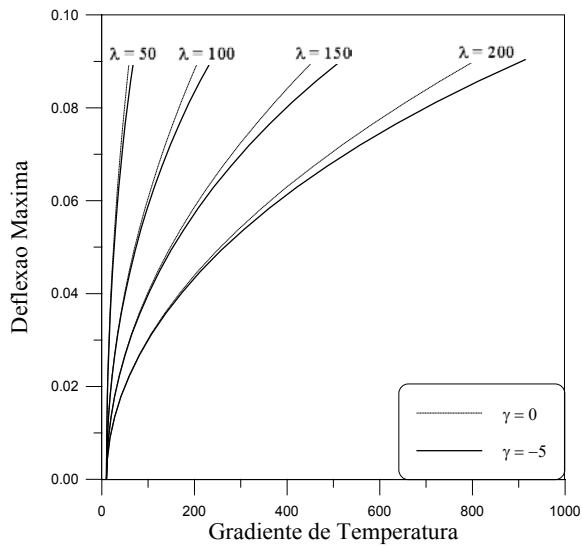


Figura 4 - Deflexão máxima em função da temperatura.

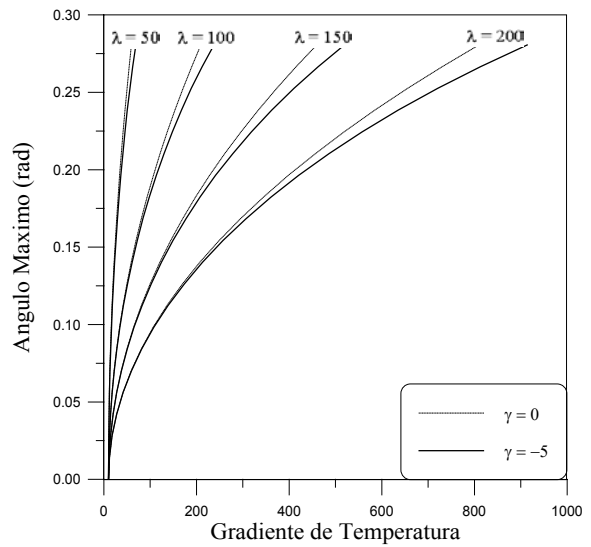


Figura 5 - Ângulo máximo em função da temperatura.

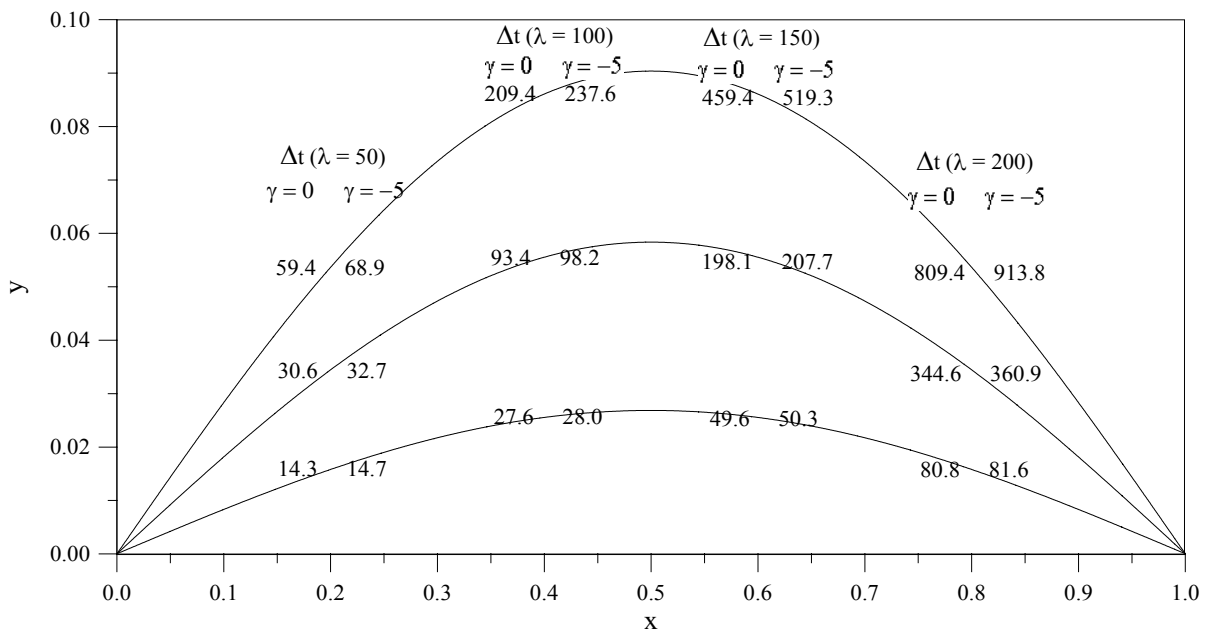


Figura 6 - Configurações defletidas com as temperaturas referentes para cada razão de esbelteza.

E por fim, a figura 6 mostra configurações deformadas em função do gradiente de temperatura para as razões de esbeltez  $\lambda = 50, 100, 150$  e  $200$ . As configurações são plotadas para temperaturas entre a temperatura crítica de flambagem e a temperatura na qual a viga deforma 2%.

## 5. Conclusões

A formulação e solução para uma análise de pós-flambagem não-linear de vigas elásticas esbeltas sujeitas a um gradiente de temperatura uniforme é realizada com êxito neste trabalho. A viga é assumida restringida por condições de contorno imóveis bi-rotuladas e a análise é realizada para materiais cuja relação deformação-temperatura é linear e não-linear. As equações de governo são escritas na sua forma adimensional, e é visto que dois parâmetros controlam a solução: a razão de esbeltez e o coeficiente de deformação térmica não-linear. A temperatura crítica de flambagem também é calculada. A solução analítica permite analisar a expansão da viga e suas configurações deformadas com o aumento do gradiente de temperatura. E por fim, um estudo comparativo é realizado e resultados são obtidos para um intervalo de temperatura como função das razões de esbeltez e do coeficiente de deformação térmica não-linear.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Agência Nacional de Petróleo (ANP) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por este trabalho.

## 7. Referências

- EL NASCHIE, M. S. Thermal Initial Post-Buckling of the Extensional *Elastica*. Int. J. Mech. Sci., vol.18, pp. 321-324, 1976.
- JEKOT, T. Nonlinear Problems of Thermal Post-Buckling of a Beam. J. Thermal Stresses, vol. 19, pp. 359-367, 1996.
- COFFIN, D. W., BLOOM, F. *Elastica* Solution for the Hygrothermal Buckling of a Beam. Int. J. Non-Linear Mech., vol. 34, pp. 935-947, 1999.
- LI, S. R., CHENG, S. J. Analysis of Thermal Post-Buckling of a Heated Elastic Rods. Appl. Math. Mech. (English ed.), vol. 21, pp. 133-140, 2000.
- LI, S., ZHOU, Y.-H., ZHENG, X. Thermal Post-Buckling of a Heated Elastic Rod with Pinned-Fixed Ends. J. Thermal Stresses, vol. 25, pp. 45-56, 2002.
- CISTERNAS, J., HOLMES, P. Buckling of Extensible Thermoelastic Rods. Math. and Computer Modelling, No. CH02, 2002.
- SMITH, R. T., STERN, R., STEPHENS, P. W. Third Order Elastic Moduli of Polycrystalline Metals from Ultrasonic Measurements. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 40, pp. 1002-1008, 1966.
- BAŽANT, Z. P., CEDOLIN, L. Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, pp. 38-45, Ed. New York Oxford, 1991.
- MATHCAD: Mathcad 2000 Professional for PC, MathSoft Inc., 1999.