

# UMA NOVA ABORDAGEM COM A FORMULAÇÃO COM QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO RNO EM PROBLEMAS DE CONVECÇÃO FORÇADA EM ESCOAMENTOS POTENCIAIS

Carlos Friedrich Loeffler<sup>1</sup>, Markcilei Lima Dan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av Fernando Ferrari, s.n., Vitória, ES  
carlosoeffler@bol.com.br

<sup>2</sup> Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av Fernando Ferrari, s.n., Vitória, ES  
dan\_m.l@bol.com.br

**Resumo** – A estratégia da formulação com Quase-Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno para solução de problemas de convecção forçada mostrou-se plenamente satisfatória, resolvendo com ótima precisão problemas de escoamento potencial com velocidades variáveis para valores medianos do número de Peclet, superando as limitações das formulações precedentes tanto em precisão quanto na flexibilidade na consideração das condições de escoamento. Neste trabalho estabelece-se uma formulação alternativa, onde se busca escrever a equação integral de governo em termos de uma função potencial de velocidades  $e$ , usando a tática de integração por partes, desdobrar-se a integral de domínio resultante do termo advectivo em outras três integrais de contorno exatas e apenas uma integral de domínio para posterior interpolação. Este é o ponto básico para alcançar melhores resultados. Empregando elementos de contorno constantes, é apresentada a solução numérica de um problema bidimensional  $e$ , de maneira a ratificar o desempenho da formulação desenvolvida, seus resultados são comparados com os valores analíticos disponíveis.

**Palavras-Chave:** Método de Elementos de Contorno, Quase-Dupla Reciprocidade, Convecção Forçada, Simulação Numérica.

**Abstract** – The Quasi-Dual Boundary Element formulation achieves very good results in convective heat transfer for potential fluid flow with median Peclet numbers, independent of the velocity field being constant or variable. This formulation showed better accuracy and flexibility in comparison with former alternative boundary formulations. In this work the Quasi-Dual approach is used, but the main purpose is to rewrite the governing integral equation in terms of the potential velocity function and to divide this integral in four terms. Three of them are integrated without approximations and the last one is transformed according to the Quasi-Dual formulation procedure. This is the aim to achieved better results than with other formulations. Using constant boundary elements, the numerical solution of two-dimensional problems is shown and these results are compared with analytical ones, in order to prove the good performance of the proposed formulation.

**Keywords:** Boundary Element Method, Quasi-Dual Reciprocity, Diffusive-Advective problems, Numerical Simulation.

## 1. Introdução

Existem muitos problemas importantes na engenharia industrial envolvendo transferência de energia e massa, nos quais o fenômeno da transferência de calor pela simples diferença de temperatura entre as partes de um meio contínuo – a difusão - associa-se ao fenômeno da advecção, onde uma quantidade de energia térmica é transferida pelo movimento deste meio, que pode ser o escoamento de um fluido ou o transporte de particulados. Esta correlação entre estes dois modos distintos e interligados de transferência de calor é denominada de convecção.

Há situações bastante complexas onde a convecção aparece como ponto mais importante na definição de um problema físico, como os processos de solidificação de produtos siderúrgicos pelo lingotamento contínuo e os problemas de mistura, dispersão ou transporte de substâncias distintas. Estes últimos podem ocorrer em meios abertos, como a dispersão de poluentes em bacias hidrográficas, ou em meios fechados, como nos dutos onde combustíveis e substâncias correlatas são conduzidos entre locais distantes. Nesta última categoria podem se enquadrar os casos convectivos mais importantes ligados à indústria de petróleo.

Via de regra, os diferenciais de temperatura e o escoamento do produto pela tubulação são suficientes para gerar gradientes térmicos que afetam tanto a potência necessária ao efetivo transporte da substância quanto implicam em questões de integridade estrutural que interferem em sua vida útil, passando por uma série de outros problemas de interesse.

O presente trabalho assim se justifica plenamente, por estar dentro de um contexto onde se busca o desenvolvimento de modelos numéricos que permitam uma melhor simulação de um problema tão importante, vasto, complexo e de interesse multidisciplinar, onde se destaca na atualidade a engenharia de petróleo. A escolha do Método dos Elementos de Contorno baseia-se na sua enorme simplicidade, baixo custo e elevada precisão de resultados, verificados em diversas aplicações correlatas.

## 2. Equação de Governo

Considere um volume de controle elementar bidimensional  $\Omega$  por onde flui um escoamento potencial no qual um ponto  $X$  tem coordenadas representadas pelo par  $(x_1, x_2)$ . Em notação indicial, a equação diferencial que caracteriza o problema de transferência de calor por condução e advecção no meio fluido é dada por:

$$K\theta_{,ii} = v_i\theta_{,i} \quad (1)$$

Na equação anterior  $\theta$  é a temperatura,  $K$  é um escalar associado às propriedades térmicas do meio contínuo e homogêneo e  $v_i$  denota as componentes de velocidade do fluido. As condições de contorno são definidas por:

$$\theta = \bar{\theta} \quad \text{em } \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (2)$$

$$K\theta_{,i}n_i - \theta v_i n_i = \bar{f} \quad \text{em } \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (3)$$

## 3. Formulação Integral

O ponto de partida para a formulação proposta requer a transformação da equação (1), na forma apresentada abaixo, com base na condição de incompressibilidade do escoamento:

$$K\theta_{,ii} = (v_i\theta)_{,i} \quad (4)$$

Multiplicando-se a equação (4) por uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$  e integrando no domínio, tem-se:

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (v_i\theta)_{,i} u^* d\Omega \quad (5)$$

Na equação anterior,  $u^*(\xi; X)$  é a denominada solução fundamental, utilizada amplamente nas formulações do Método dos Elementos de Contorno. Neste trabalho é utilizada a solução fundamental correspondente à Equação de Poisson, considerando um meio infinito e uma fonte concentrada no ponto  $X = \xi$ , conforme apresenta Brebbia (1978). O lado esquerdo da equação (5) quando trabalhado pela aplicação de integral por partes e Teorema da Divergência, conduz a um resultado bastante conhecido, cuja demonstração pode ser colhida em Brebbia et al (1984):

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} u^* d\Omega = K \left[ \int_{\Gamma} (qu^* - \theta q^*) d\Gamma - c(\xi)\theta(\xi) \right] \quad (6)$$

Da mesma forma, aplicando-se o esquema de integração por partes no lado direito da equação (5), tem-se:

$$\int_{\Omega} (v_i \theta)_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (v_i \theta u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i \theta u_{,i}^* d\Omega \quad (7)$$

A primeira integral do lado direito da equação (7) é transformada numa integral de contorno também através da aplicação do Teorema da Divergência. Com isto, reescreve-se a equação (5) numa forma equivalente em que resta apenas uma integral de domínio:

$$K \left[ \int_{\Gamma} (qu^* - \theta q^*) d\Gamma - c(\zeta) \theta(\zeta) \right] = \int_{\Gamma} v_i n_i \theta u^* d\Gamma - \int_{\Omega} v_i \theta u_{,i}^* d\Omega \quad (8)$$

Propõe-se agora uma nova forma de operacionalizar a integral de domínio resultante. Através das considerações que regem o escoamento potencial, conforme apresenta Shames (1973), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} v_i \theta u_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega \quad (9)$$

Na equação precedente  $\Phi$  constitui a função potencial de velocidades. Transferindo-se agora a derivada da função  $\Phi$  para o produto  $\theta u_{,i}^*$  através da aplicação de integral por partes, resulta em:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\Phi \theta u_{,i}^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \Phi (\theta u_{,i}^*)_{,i} d\Omega \quad (10)$$

A primeira integral de domínio do lado direito da equação (10) é transformada mais uma vez em termos de variáveis de contorno pela aplicação do Teorema da Divergência. Desenvolvendo a derivada do produto que aparece na segunda integral, reescreve-se a equação anterior como:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi \theta u_{,i}^* n_i d\Gamma - \left( \int_{\Omega} \Phi \theta_{,i} u_{,i}^* d\Omega + \int_{\Omega} \Phi \theta u_{,ii}^* d\Omega \right) \quad (11)$$

Pela definição da solução fundamental utilizada, ou seja:

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\zeta, x) \quad (12)$$

As propriedades da função Delta de Dirac conduzem a:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi \theta u_{,i}^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \Phi \theta_{,i} u_{,i}^* d\Omega + c(\zeta) \Phi(\zeta) \theta(\zeta) \quad (13)$$

#### 4. Aplicação da Quase-Dupla Reciprocidade

Resta ainda uma integral de domínio, que deve ser tratada pela formulação Quase-Dual, conforme apresenta Massaro e Loeffler (2001) e, também, Loeffler e Mansur (2003). Faz-se então a seguinte aproximação:

$$\Phi \theta_{,i} \cong \alpha_p^j \eta_{pi}^j = \alpha_p^j \psi_{p,i}^j \quad (14)$$

Logo:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega \cong \int_{\Gamma} \Phi \theta u_{,i}^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_p^j \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega + c(\zeta) \Phi(\zeta) \theta(\zeta) \quad (15)$$

Como  $\alpha_p^j$  é constante ao longo do domínio, pode ser retirado da integral. Intercambiando a derivada de  $\psi_p^j$  com  $u_{,i}^*$  obtém-se:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega \cong \int_{\Gamma} \Phi \theta u_{,i}^* n_i d\Gamma - \alpha_p^j \left[ \int_{\Omega} (\psi_p^j u_{,i}^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \psi_p^j u_{,ii}^* d\Omega \right] + c(\zeta) \Phi(\zeta) \theta(\zeta) \quad (16)$$

Pela aplicação do Teorema da Divergência e propriedades da solução fundamental pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \Phi_{,i} \theta u_{,i}^* d\Omega \cong \int_{\Gamma} \Phi \theta u_{,i}^* n_i d\Gamma - \alpha_p^j \left[ \int_{\Gamma} \psi_p^j q^* d\Gamma + c(\zeta) \psi_p^j(\zeta) \right] + c(\zeta) \Phi(\zeta) \theta(\zeta) \quad (17)$$

Substituindo-se a equação (17) na equação (9) e, por sua vez, esta na expressão (8), tem-se, finalmente, a equação escrita toda em termos integrais e valores de contorno:

$$K \left[ c(\zeta)\theta(\zeta) + \int_{\Gamma} (\theta q^* - q u^*) d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} (\Phi \theta q^* - v_i n_i \theta u^*) d\Gamma + c(\zeta)\Phi(\zeta)\theta(\zeta) - \alpha_p^j \left[ \int_{\Gamma} \psi_p^j q^* d\Gamma + c(\zeta)\psi_p^j(\zeta) \right] \quad (18)$$

## 5. Discretização da Equação Integral

Os procedimentos de discretização com o MEC são bastante básicos e podem ser encontrados na literatura sobre o Método, e além das referências já citadas, pode-se reportar a Kytbe (1995) e a Brebbia e Walker (1980). Usando o método da colocação chega-se à seguinte equação matricial:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{S}\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{H}\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

O vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  pode ser eliminado utilizando-se da equação (14) que aplicada a um domínio já discretizado fornece:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}_{,i}) \quad (20)$$

Substituindo-se este resultado na equação (19) tem-se:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{S}\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{H}\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta}^{-1} (\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}_{,i}) \quad (21)$$

Resta ainda uma derivada espacial, que pode ser eliminada utilizando-se um esquema de interpolação similar ao usado por Partridge (1993/):

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (22)$$

Derivando-se esta equação tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{F}_{,i} \boldsymbol{\beta} \quad (23)$$

Obtendo-se  $\boldsymbol{\beta}$  da equação (22), pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\theta}_{,i} = \mathbf{F}_{,i} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad (24)$$

Substituindo (24) em (21) tem-se:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{S}\boldsymbol{\theta} = -(\mathbf{H}\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}_{,i} \mathbf{F}_{,i} \mathbf{F}^{-1}) \boldsymbol{\theta} \quad (25)$$

Ou melhor:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{S}\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{M}\boldsymbol{\theta} \quad (26)$$

A equação anterior constitui um sistema de equações lineares que pode ser resolvido computacionalmente.

## 6. Exemplo de Aplicação

Para uma demonstração do desempenho da formulação exposta, considere um volume de controle bidimensional, de lados iguais, no qual somente condições de contorno essenciais são prescritas. Existem componentes cartesianas de velocidade  $v$  e  $w$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, conforme exposto na figura 1:

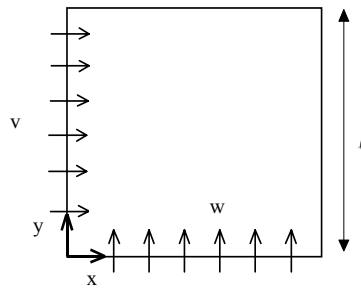


Figura 1. Características físicas e geométricas do volume de controle

O campo de temperaturas imposto nas fronteiras é dado segundo a função:

$$\theta = e^{vx} e^{wy} \quad (27)$$

O fluxo difusivo é calculado pela seguinte expressão:

$$q = K \frac{d\theta}{dx} \quad (28)$$

Considerando a constante de difusividade térmica com valor unitário, os fluxos difusivos nas direções  $x$  e  $y$  são dados analiticamente por:

$$q_x = \frac{d\theta}{dx} = v e^{vx} e^{wy} \quad (29)$$

$$q_y = \frac{d\theta}{dy} = w e^{vx} e^{wy} \quad (30)$$

A análise da qualidade dos resultados é feita, inicialmente, considerando-se a capacidade de convergência dos resultados numéricos em função do refinamento da malha utilizada. Com este propósito foram empregadas discretizações com 20, 40, 80 e 160 pontos nodais. Neste trabalho utilizou-se elementos de contorno com interpolação constante. Considerou-se inicialmente o número de Peclet como igual a dois e calculou-se o erro médio percentual para cada malha, computando apenas os valores do fluxo de calor nos pontos nodais situados nas faces verticais, onde ocorrem os fluxos de maior intensidade. Tomou-se como medida de erro em cada ponto nodal o seguinte quociente:

$$E = \left| \frac{q_{\text{numérico}} - q_{\text{analítico}}}{Q_{\text{analítico}}} \right| \quad (31)$$

No denominador da expressão anterior é considerado o maior valor de fluxo analítico na face. Na figura 2 são mostrados os resultados obtidos. Observa-se que para um malha bastante simples, com 20 nós, os resultados já são bastante razoáveis para o valor do número de Peclet empregado. O erro médio percentual decresce a valores ínfimos, numa taxa de convergência igualmente satisfatória.

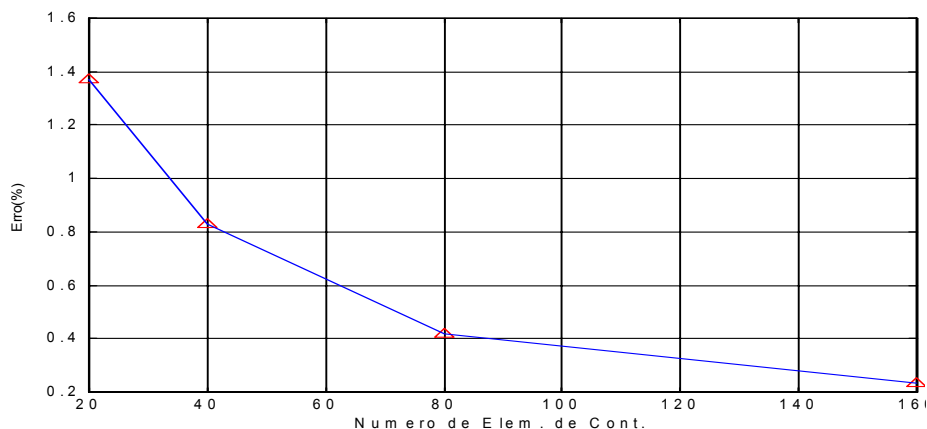


Figura 2. Erro percentual obtido no fluxo de calor, para as faces verticais, com o refinamento da malha.

O próximo teste qualifica o desempenho do método tomando a malha mais refinada (160 nós) e aumentando o valor do número de Peclet. Nestas condições, o efeito do fenômeno advectivo começa a preponderar sobre a difusão. Tomando-se uma vez mais as faces verticais, cujos valores de fluxo difusivo são bem mais significativos, e a mesma medida de erro o gráfico mostrado na figura 3 reflete o comportamento da solução numérica.

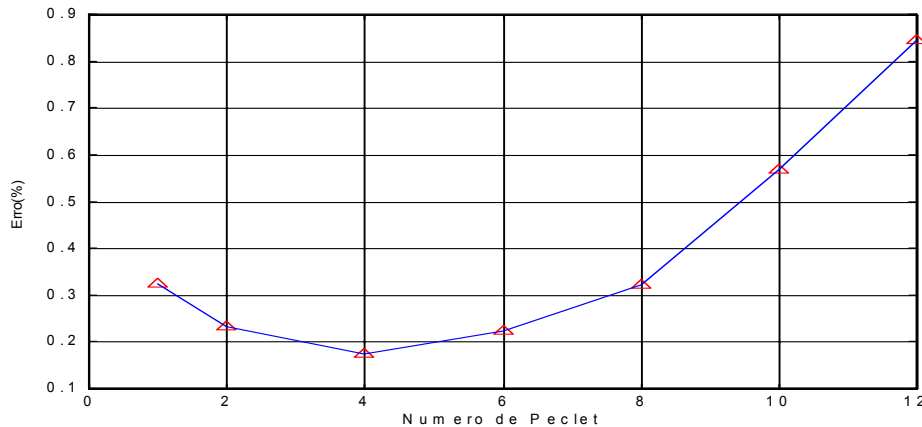


Figura 3. Erro percentual no fluxo de calor, para as faces verticais em função do Número de Peclet

Pode-se observar o bom comportamento da formulação, pois que os erros calculados são bastante aceitáveis, ficando abaixo de 1% na faixa de valores de Peclet iguais a 12, resultados estes bem superiores aos apresentados por outras formulações similares do Método dos Elementos de Contorno.

## 7. Conclusões

A formulação do Método dos Elementos de Contorno baseada na Dupla Reciprocidade tradicional tem sérias dificuldades para tratar os problemas de convecção forçada mesmo para números de Peclet baixos, que se explica pelas grandes distorções ocasionadas por duas interpolações que são nela realizadas, feitas para representar o fenômeno convectivo. Na formulação aqui proposta, embora as mesmas interpolações estejam presentes, o uso recursivo das integrações por partes permitiu a geração de um número adicional de integrais que não são afetadas por esse tipo de aproximação, garantindo uma redução significativa dos erros.

A flexibilidade no tratamento de problemas que possuem campos de velocidade variável, embora não tenha sido aqui mostrada por falta de espaço, credencia a formulação a ser uma alternativa competitiva com outros métodos para o tratamento numérico desta categoria de importantes problemas em engenharia.

## 8. Referências

- BREBBIA, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London., 1978.
- BREBBIA, C.A., WALKER, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- KYTBE, P.K., *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- NARDINI, D., BREBBIA, C.A., A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements, *Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering*, Southampton, 1982.
- LOEFFLER, C.F., MANSUR, W.J. Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Method for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation, *submetido e aprovado para publicação no International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- MASSARO, C.A.M., LOEFFLER, C.F., Boundary Element Formulation Applied in the Solution of Convective-Diffusive Heat Transfer Problems, *XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (anais em CFD ROM)*, Uberlândia, 2001.
- PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. and WROBEL, L.C., *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
- SHAMES, I. H. *Mecânica dos Fluidos*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1973.